Universidad Simón Bolıvar.
Departamento de Matemáticas puras y aplicadas.
Autoevaluación No. 2 MA2115
Enero 2009

I. Evaluación Teórica.

1. Definir los siguientes conceptos:
   a) Ecuación diferencial, ecuación diferencial parcial y ecuación diferencial ordinaria.
   b) Orden de una ecuación diferencial.
   c) Ecuación diferencial ordinaria lineal.

2. Defina qué es un problema con valor inicial y qué es un problema con valor de frontera.

3. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $I \subset \mathbb{R}$,

$$C^k(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, \text{tal que } f \text{ y } \frac{d^m f}{dx^m} \text{ son continuas } \forall m \leq k\}.$$

   a) Demuestre que $C^k(I)$ es un espacio vectorial.
   b) Demuestre que el operador definido por

$$L[y] = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

   es un operador lineal, de $C^n(I)$ a $C(I)$, donde $\{a_k(x)\}_{k=0}^n$ son funciones continuas definidas sobre I.

4. Enuncie la versión del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

5. Determine la existencia o no y la unicidad de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} y' = \ln(1 + y^2), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

II. Evaluación Práctica.

1. Resolver $y' = y - xe^{-2x}y^3$.
2. Resolver $y' = \frac{x+2y-1}{2x+y-5}$.
3. Resolver $y'[1 + (y')^2] = y''$.
4. Supongamos que una población experimental de moscas de la fruta, aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si hay 100 moscas tras el segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día, ¿cuántas moscas había en la población original?

Respuestas.

I. Parte teórica.

1. Las definiciones son las siguientes:

   a) *Ecuación diferencial:* Es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables.
   Ecuación diferencial ordinaria: Es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida, donde la función depende de una sóla variable.
   b)*Ecuación diferencial parcial:* Si la función involucrada en la ecuación depende de dos o más variables, se llama ecuación diferencial parcial.
   Ejemplos: $\frac{dy}{dx} + 2x + y = 0$, es una ecuación diferencial ordinaria (y depende sólo de la variable x) y $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, es una ecuación diferencial parcial. (V depende de las variables x e y).

   b) El orden de una ecuación diferencial ordinaria es el mayor grado de derivación que aparece en la ecuación. Por ejemplo, $\frac{d^5y}{dx^5} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sqrt{y} = 0$, es una ecuación diferencial de orden 5.

   c) Una ecuación lineal de orden n, es aquella del tipo

   $$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

   donde $\{a_k(x)\}_{k=0}^n$ y $b(x)$ son funciones contínuas y derivables definidas sobre I.

2. Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial, sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.
   Un problema con valor de frontera, busca determinar una solución a una ecuación diferencial, sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas, especificadas en dos o más valores de las variables independientes. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera.

3. a) Para demostrar que $C^k(I)$ es un espacio vectorial, basta demostrar que si f y g son dos funciones en $C^k(I)$, entonces $f + \lambda g \in C^k(I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora, sabemos que toda función derivable es contínua y que la suma de dos funciones derivables, es derivable. Más aún para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos las conocidas reglas de derivación

$$\frac{d^k}{dx^k}(f+g)(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x) + \frac{d^k g}{dx^k}(x),$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(\lambda f)(x) = \lambda \frac{d^k f}{dx^k}(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

en consecuencia, gracias a las reglas anteriores, tenemos que la combinación lineal, $f + \lambda g \in C^k(I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Para demostrar que L es un operador lineal, basta verificar que

$$L[\lambda f + g](x) = \lambda L[f](x) + L[g](x),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

si $f, g \in C^n(I)$. En efecto, gracias a la reglas de derivación

$$L[\lambda f + g](x) =$$

$$a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}(\lambda f + g)(x) + \cdots + a_0(x)(\lambda f + g)(x) =$$

$$\lambda\left(a_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} + \cdots + a_0(x)f(x)\right) + \left(a_n(x)\frac{d^n g(x)}{dx^n} + \cdots + a_0(x)g(x)\right) =$$

$$\lambda L[f](x) + L[g](x).$$

4. Teorema de Existencia y unicidad (Teorema de Picard):
Supongamos que la función $f(x, y)$ es contínua en algún rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}$ y sea (x_0, y_0) un punto en el interior de R. Entonces, el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0,$$

tiene al menos una solución en algún intervalo abierto $I \subset [a, b]$ que contiene al punto $x = x_0$. Si además $\frac{\partial f}{\partial y}$ es contínua sobre R, entonces la solución es única en algún intervalo $I_0 \subset [a, b]$ que contiene al punto $x = x_0$.

5. Observamos que la función $f(x, y) = \ln(1 + y^2)$ es contínua y además $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+y^2}$ es contínua, alrededor del punto $(0, 0)$. Por el teorema de Picard, se concluye que la solución existe y es única alrededor de $(0, 0)$.

II. Ejercicios prácticos.

1. La ecuación $y' = y - xe^{-2x}y^3$ es del tipo Bernoulli con $n = 3$. Expresamos

$$y^{-3}y' - y^{-2} = -xe^{-2x}$$

y realizando el cambio $u = y^{-2}$, por lo tanto $u' = -2y^{-3}y'$, obtenemos al sustituir en la ecuación anterior,

$$-\frac{1}{2}u' - u = -xe^{-2x}. \tag{1}$$

Primero resolvemos la ecuación homogénea: $-\frac{1}{2}u' - u = 0$. Despejando, ya que $u' = \frac{du}{dx}$, obtenemos que $\frac{du}{u} = -2dx$, lo que implica, al integrar que $\ln u = -2x + k$, con $k \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$u = Ce^{-2x}, \text{ con } C \in \mathbb{R},$$

es solución general de la homogénea.
Ahora, para resolver (1) buscamos una solución de la forma

$$u = C(x)e^{-2x}, \tag{2}$$

con $C(x)$ a determinar. Derivando,

$$u' = C'(x)e^{-2x} - 2xC(x)e^{-2x} \tag{3}$$

y sustituyendo (2) y (3) en (1), obtenemos al simplificar que

$$C'(x) = 2x,$$

e integrando

$$C(x) = 2x + k, \text{ con } \quad k \in \mathbb{R},$$

por lo tanto,

$$u(x) = [2x + k]e^{-2x} \text{ con } \quad k \in \mathbb{R}.$$

Devolviendo el cambio, concluimos que la solución general al problema es:

$$y^{-2}(x) = [2x + k]e^{-2x} \text{ con } \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Para resolver
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-1}{2x+y-5}, \tag{4}$$
primero resolvemos el sistema
$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$$
cuya solución es $(x,y) = (3,-1)$. Ahora, realizando los cambios $X = x-3$, $Y = y+1$ en (4) y simplificando, obtenemos que
$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y}{2X+Y}. \tag{5}$$
Observando que podemos expresar $\frac{X+2Y}{2X+Y} = \frac{1+2(Y/X)}{2+(Y/X)}$, realizamos el cambio $z = \frac{X}{Y}$, entonces $\frac{dY}{dX} = X\frac{dz}{dX} + z$. Sustituyendo en (5), obtenemos
$$X\frac{dz}{dX} = \frac{1-z^2}{2+z}, \tag{6}$$
que es finalmente, una ecuación a variables separables. Por lo tanto,
$$\frac{dX}{X} = \frac{2+z}{1-z^2}dz.$$
Integrando ambos miembros de la identidad anterior, donde particularmente, en el miembro derecho hemos aplicado fracciones simples y propiedades de la función $\ln z$, podemos concluir
$$\ln X = -\frac{3}{2}\ln(1-z^2) + k, \text{ entonces } X = C(1-z^2)^{-3/2},\ C \in \mathbb{R}.$$
Ahora, devolviendo los cambios realizados en (4), (5) y (6) concluimos que la solución general al problema es:
$$x-3 = C\left[1-\left(\frac{y+1}{x-3}\right)^2\right]^{-3/2} \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

3. Para resolver
$$y'(1+(y')^2) = y'' \tag{7}$$

aplicamos reducción de orden, observando que no aparece la variable x. Por ello, en (7) realizamos el cambio $y' = u$, así $y'' = u\frac{du}{dy}$ y sustituyendo obtenemos

$$(1 + u^2) = \frac{du}{dy}, \text{ si } u \neq 0.$$

Separando variables e integrando obtenemos que,

$$\text{Arctan}(u) = y + c_1.$$

Despejando y devolviendo el cambio realizado, llegamos a la ecuación,

$$\frac{dy}{dx} = \tan(y + c_1).$$

Nuevamente, separando variables e integrando la identidad anterior, tenemos que

$$x + c_2 = \int \text{cotan}(y + c_1)dy,$$

y resolviendo esta última integral, concluimos que la solución general al problema es

$$x + c_2 = \ln|\text{sen}(y + c_1)|, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Denotaremos por $y(t) = \{\text{Número de moscas en } t \text{ días}\}$. Según la ley de crecimiento exponencial (o ley de Malthus) la ecuación diferencial a considerar es dada por

$$\frac{dy}{dt} = ay, \text{ con } \quad a > 0,$$

cuya solución general es $y(t) = Ce^{at}$ con $C \in \mathbb{R}$.
Ahora por hipótesis, tenemos que $y(2) = 100$ e $y(4) = 300$ lo que nos lleva, al sustituir en dicha solución, a considerar el sistema

$$\begin{cases} 100 = Ce^{2at} \\ 300 = Ce^{4at}. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, determinamos que $C = 100/3$ y $a = \ln 3/2$, por lo que tenemos que la solución particular o específica al problema es

$$y(t) = \frac{100}{3}e^{\frac{\ln 3}{2}t}.$$

Dado que $y(0) = \frac{100}{3}$, podemos concluir que la población inicial eran de 33 moscas aproximadamente.

Nota: Observaciones y sugerencias escribir a iathamai@usb.ve